Hängende Feder

Eine hooksche Feder der Ruhelänge L_0 (und unbekannter Federkonstante k) dehnt sich unter ihrem Eigengewicht und der Erdbeschleunigung g auf die Länge L_g. Hängt man nun weiterhin eine Referenzmasse m_R an die bereits gedehnte Feder, so dehnt die sie sich um weitere ΔL[1].

- Berechnen Sie die Federmasse M aus den Längen L_0, L_g, ΔL, sowie g und m_R.

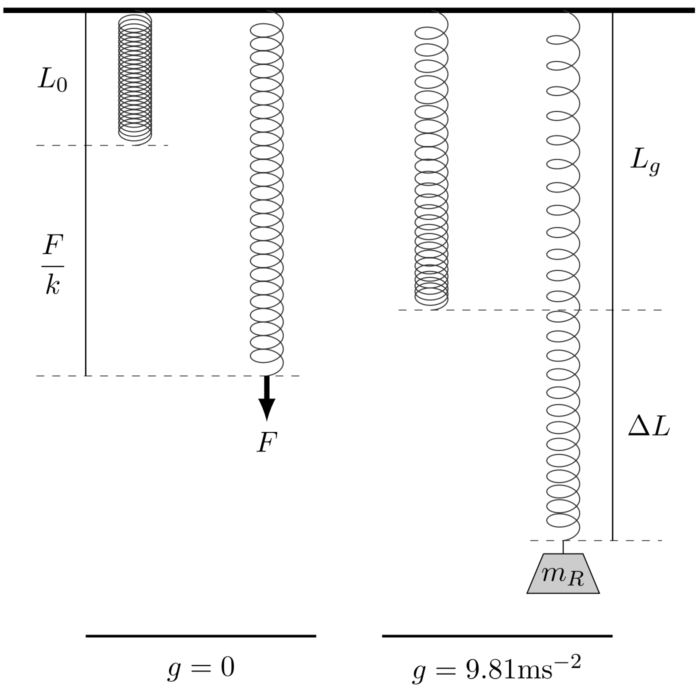

Abbildung 1: Feder unter unterschiedlichen Belastungen

Man betrachte die Feder in der Schwerelosigkeit mit einer anliegenden Spannkraft F, die gleich der Kraft ist, die die Referenzmasse im Schwerefeld der Erde auf die Feder ausübt ($F = m_R \cdot g$). Dann dehnt sich die Feder gemäß der Abbildung auf die Länge $L_0' = L_0 + \frac{F}{k}$ mit noch homogener Massenverteilung. Ein infinitesimales Massestück lässt sich also darstellen als:

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L_0'}\,\mathrm{d}l = \frac{M}{L_0 + \frac{F}{k}}\,\mathrm{d}l \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}l = \frac{1}{M}\left(L_0 + \frac{F}{k}\right)\mathrm{d}m$$

Unter einer Spannung F dehnt sich ein solches Massestück also um $\frac{F\,\mathrm{d}m}{Mk}$. Befindet sich die Feder nun im Schwerefeld, so wirkt auf das Massestück zusätzlich zur Grundspannung $m_R \cdot g$ noch die Gewichtskraft $F_{g_u} = m_u g$ der sich unter dem Massestück befindlichen Federmasse.

$$\mathrm{d}l' = \frac{1}{M}\left(L_0 + \frac{m_R g + m_u g}{k}\right)\mathrm{d}m = \left(\frac{L_0}{M} + \frac{(m_R + m_u)g}{Mk}\right)\mathrm{d}m = \left(\overbrace{\frac{L_0 k + m_R g}{Mk}}^{\text{const}} + \frac{g}{Mk}m_u\right)\mathrm{d}m$$

Um nun die Gesamtlänge der Feder zu finden, integriert man beide Seiten über die gesamte Feder (l' von 0 bis zur Gesamtlänge $L_g + \Delta L$ und m von 0 bis zur Federgesamtmasse M) und macht sich zu nutze, dass beim Integrieren von unten nach oben die untere Federmasse m_u bei einer beliebigen Höhe schlicht die Gesamtmasse der Feder bis zu dieser Höhe ist. Es gilt also:

$$L_g + \Delta L = \int_0^{L_g + \Delta L}\mathrm{d}l' = \int_0^M \frac{L_0 k + m_R g}{Mk} + \frac{g}{Mk}m\;\mathrm{d}m = \frac{L_0 k + m_R g}{k} + \frac{Mg}{2k} = L_0 + \frac{g}{2k}(M + 2m_R)$$

$$L_g = \int_0^{L_g}\mathrm{d}l' = \int_0^M \frac{L_0}{M} + \frac{g}{Mk}m\;\mathrm{d}m = L_0 + \frac{Mg}{2k} \quad \Longrightarrow k = \frac{Mg}{2(L_g - L_0)} \quad \text{Spezialfall } m_R = 0$$

mit diesem Wissen kann man nun auf die Masse der Feder schließen:

$$L_g + \Delta L - L_0 = \frac{g}{2k}(M + 2m_R) = \frac{2g(L_g - L_0)}{2gM}(M + 2m_R) = (L_g - L_0) + \frac{2m_R}{M}(L_g - L_0)$$

$$M = \frac{L_g - L_0}{\Delta L} \cdot 2m_R \quad \text{sowie} \quad k = \frac{g m_R}{\Delta L}$$

[1]Man kann den Längen auch explizite Werte geben, da dies die Fragestellung sowohl vereinfacht, als auch veranschaulicht. Ich wollte in diesem Dokument keine Vorauswahl der Längen treffen, weswegen die allgemeine Lösung beschrieben wird.