Schwingendes Gummiband / Feder

Eine dünne hooksche Feder (Ausgangslänge L_0, Masse m & Federkonstante k) wird in die Länge L gezogen und wie eine Saite mit Auslenkung A geschwungen. Dabei gelte $A, L_0 \ll L$.

- Wie ändern sich die Schwingfrequenzen bei Änderung der Streckungslänge L?

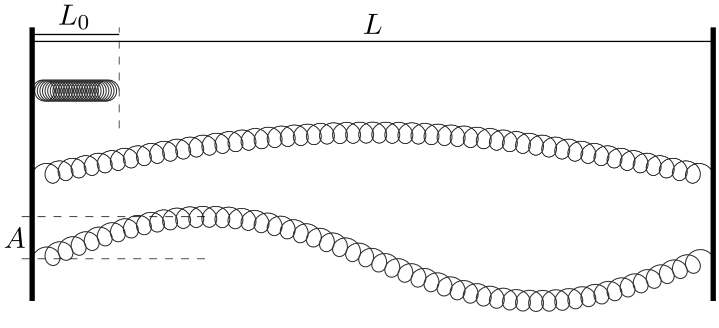

Abbildung 1: Federform und 2 mögliche Schwingungen

Tipp:
Modellieren Sie die Feder als Funktion $S(x)$ eines Fadens mit Spannung $F = k\left(\int \mathrm{d}S - L_0\right) \approx k(L - L_0) \approx kL$. Betrachten Sie dann mithilfe $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \tan\alpha = S'(x) \mid \alpha \ll 1$ (mit α als den Winkel, den die Tangente von $S(x)$ mit der x-Achse einschließt), ein infinitesimales Seilstück, und zeigen Sie dass gilt[1]:

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2}\frac{m}{L} = \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2}F \qquad \begin{array}{c} L \gg A, L_0 \\ F = ma \end{array}$$

Lösen Sie diese DGL dann mit dem Ansatz $S(x,t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_0)\sin(kx + \psi_0)$.

Das Mersennesche Gesetz (1) erlaubt die direkte Lösung des Problems. Da es allerdings nicht als bekannt angenommen werden kann, wird es im folgenden hergeleitet:

Man betrachte ein infinitesimales Stück der Feder, welche man als eindimensionale dehnbare Linie mit Funktion S(x) modelliert welche entlang der x-Achse von 0 bis L aufgespannt wurde.
Dann gilt für die Kraft auf das Federstück:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{F}_{x+\mathrm{d}x} - \vec{F}_x = F \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_{x+\mathrm{d}x} - \cos\alpha_x \\ \sin\alpha_{x+\mathrm{d}x} - \sin\alpha_x \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ S'(x+\mathrm{d}x,t) - S'(x,t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}^2 S(x,t)}{\mathrm{d}x^2} \cdot F\,\hat{e}_y\,\mathrm{d}x$$

$$= \vec{a}\,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x(t) \\ S(x,t) \end{pmatrix} \cdot \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{m}{L}\hat{e}_x\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^2 S(x,t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{m}{L}\hat{e}_y\,\mathrm{d}x$$

Mit der physikalischen Betrachtung der Statik des Ausgangszustandes (keine Bewegung in x- oder y-Richtung) können nun die Bewegungsgleichungen gefolgert werden:

$$m\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = LF\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{oder} \quad m\ddot{S} = LFS'' \qquad \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 0$$

Die x-Komponente eines jeden Federstücks bleibt somit konstant. Es reicht also, die y-Bewegung via $S(x(t),t) = S(x,t)$ zu betrachten, um das Federverhalten zu analysieren. Um die DGL zu lösen, nutzt man die Randbedingungen $S(0,t) = S(L,t) = 0$ des Problems, sowie den Ansatz

$$S(x,t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_0)\sin(kx + \psi_0)$$

$$\implies \psi_0 = 0,\ k = \frac{2\pi n}{L} \qquad \begin{array}{c} \text{da } S(0,t) = S(L,t) = 0 \\ n = 1\text{: Grundschwingung} \end{array}$$

$$m\ddot{S}(x,t) = -m\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \phi_0)\sin(kx + \psi_0) = -m\omega^2 S(x,t)$$

$$LFS''(x,t) = -LFk^2 A_0 \sin(\omega t + \phi_0)\sin(kx + \psi_0) = -LFk^2 S(x,t)$$

$$-m\omega^2 S(x,t) = -LFk^2 S(x,t) \qquad \implies \omega^2 = \frac{LF}{m}k^2 = \frac{LF}{m}\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \qquad \implies f = \frac{n}{L}\sqrt{\frac{LF}{m}} \tag{1}$$

Da sich die Feder hooksch verhält, gilt durch die kleinen Auslenkungen $F \approx kL$ und damit

$$f = \frac{n}{L}\sqrt{\frac{kL^2}{m}} = n\sqrt{\frac{k}{m}} \not\propto L$$

und damit <u>keine</u> Längenabhängigkeit der Frequenz!

[1] Das sind absichtlich sehr viele Tipps, sodass man die Aufgabe beliebig durch Entfernen einzelner Tipps erschweren kann.